ST – 511 - 2007

MOMENTO DE INÉRCIA "J"
RÁIO DE GIRAÇÃO " i "
MÓDULO DE RESISTÊNCIA "W"

PROF. HIROSHI PAULO YOSHIZANE

Referência bibliográfica:

Mecânica Técnica e Resistência dos materiais
Sarkis Melconian

MOMENTO DE INÉRCIA " J "

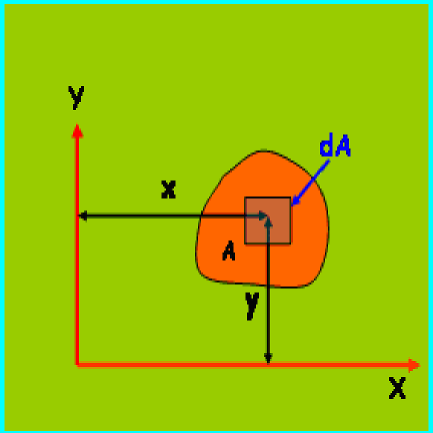
MOMENTO DE 2ª ORDEM

É definido através da integração de área dos produtos entre os infinitésimos da área que compõe uma superfície em relação as suas distâncias do eixo referencial, elevadas ao quadrado.

$$J_x = \int_A Y^2 dA \quad e \quad J_y = \int_A X^2\, dA$$

Análise dimensional de J:

$$[\,J\,] = [\,L\,]^2 . [\,L\,]^2 = [\,L^4\,]$$



As unidades de J são = mm^4 ou cm^4 ou m^4

MOMENTO ESTÁTICO

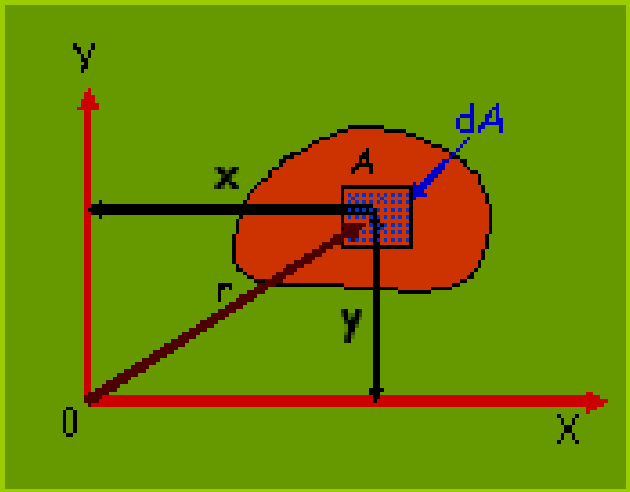
Momento polar de inércia em relação à origem:

$$J_p = \int r^2 \, dS$$

Obs: desde que: $r^2 = x^2 + y^2$, $J_p = J_x + J_y$

Superfície centrífuga: $C = J_{xy} / S$

Momento centrífugo ou produto de inércia: $J_{xy} = \int xy \, dS$



OBS:

1-O momento de inércia, nos fornece dimensionalmente, o quanto uma determinada seção é viável estáticamente.

2-Quanto maior for o valor do momento de inércia, mais resistente será a peça.

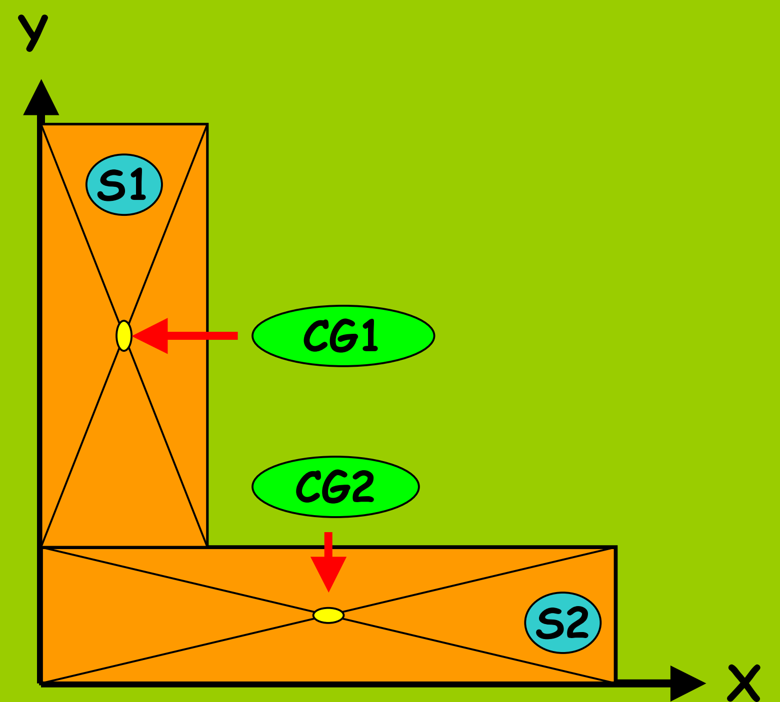
MOMENTO ESTÁTICO

Sabemos que X_{CG} e Y_{CG} são as coordenadas do centro de gravidade desta peça conjugada, ilustrada abaixo

Então:

$$XCG = \frac{(X_1.S_1 + X_2.S_2)}{(S1 + S2)}$$

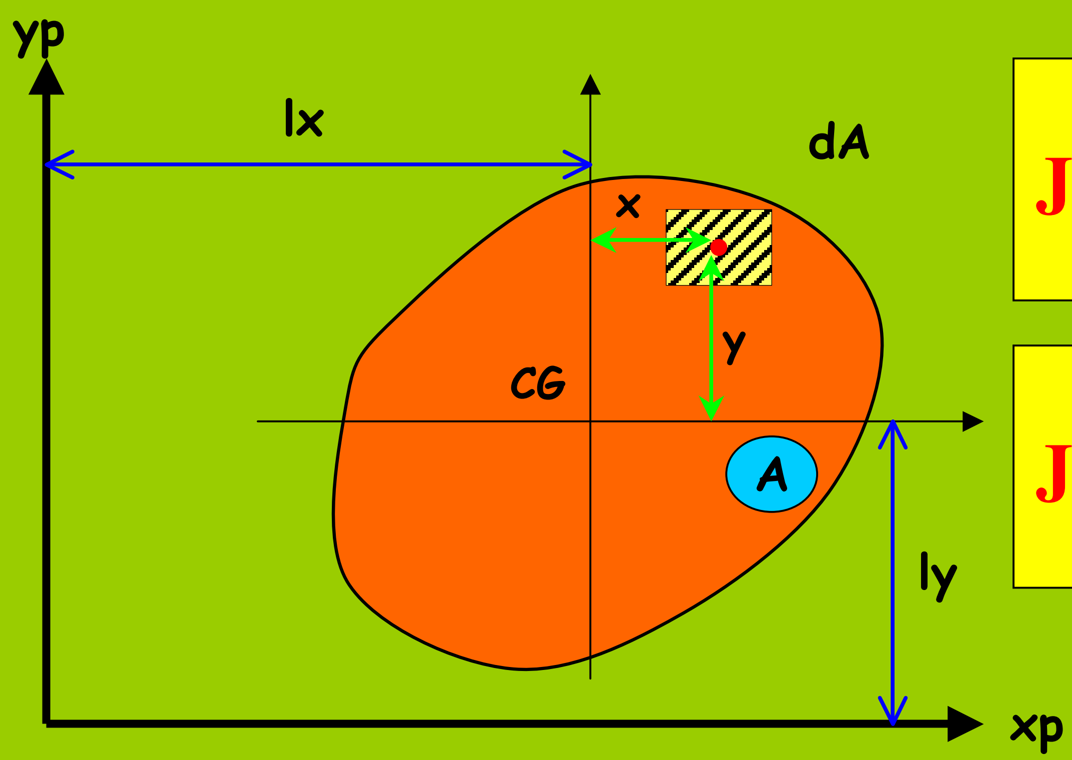
$$YCG = \frac{(Y1.S1 + Y2.S2)}{(S1 + S2)}$$



Analogamente, pode ser usado para combinações de mais de duas seções simples. Mas para seções complexas, é melhor usar um programa de integração gráfica.

TEOREMA DE Steiner – Translação de eixos

Com X e Y, que são eixos sobre o CG, de uma superfície, determinável se torna o momento de inércia desta superfície em relação a um outro eixo paralelo xp e yp em X e em Y, aplicando-se o teorema de Steiner, assim:



$$Jxp = \int_A (y + ly)^2 \, dA$$

$$Jyp = \int_A (x + lx)^2 \, dA$$

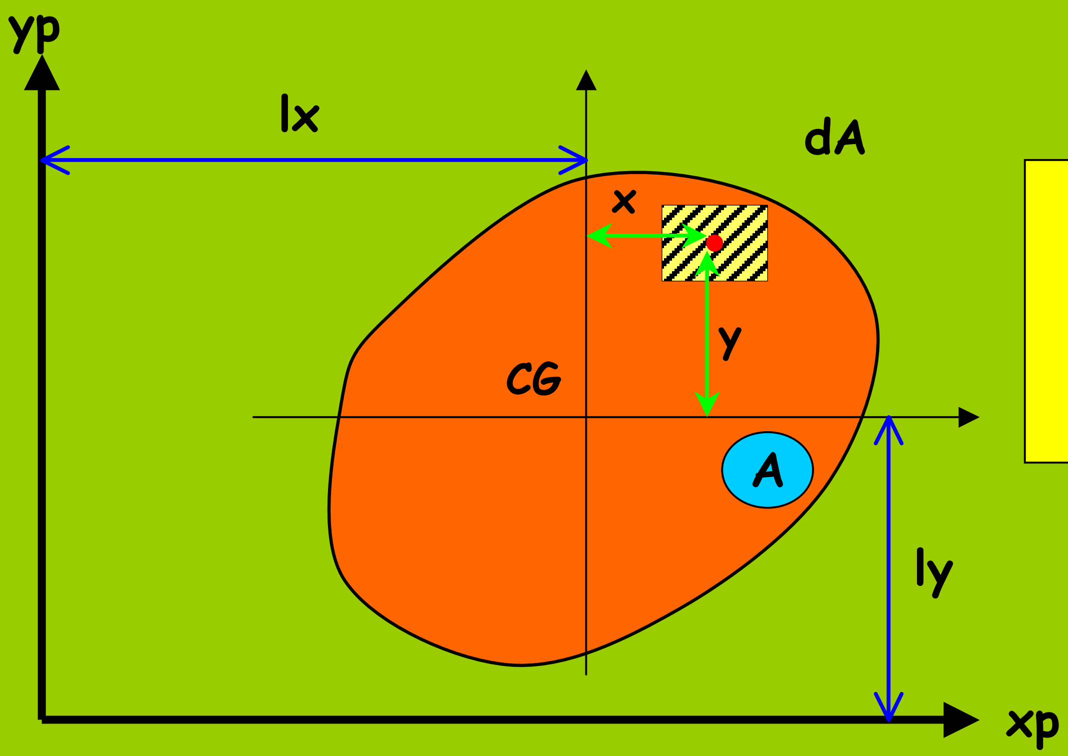
$$Jxp = \int_A (y + ly)^2\, dA + 2ly \int_A y + dA + ly^2 \int_A dA$$

veja que $2ly \int_A y + dA^2 = 0$

Pois **x** é o baricentro

$$Jxp = \int_A y^2 + ly^2 \int_A dA$$

$$Jxp = Jx + ly^2 . A$$



Vamos determinar o Jyp

$$Jyp = \int_A (x + lx)^2\, dA$$

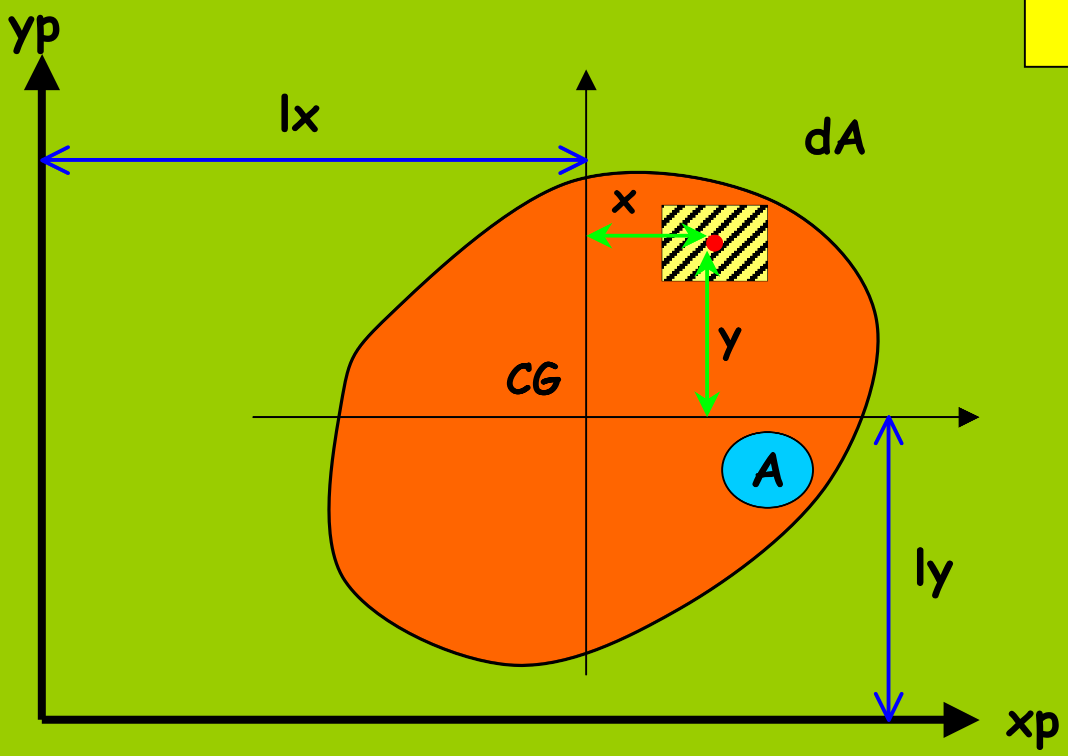
$$Jyp = \int_A (x + lx^2)$$

$$Jyp = \int_A x^2\, dA + 2lx \int_A x\, dA + lx^2 \int_A dA$$

veja que $2ly \int_A y + dA^2 = 0$

Pois **y** é o baricentro

$$Jyp = \int_A x^2\, dA + lx.ly^2 \int_A dA$$

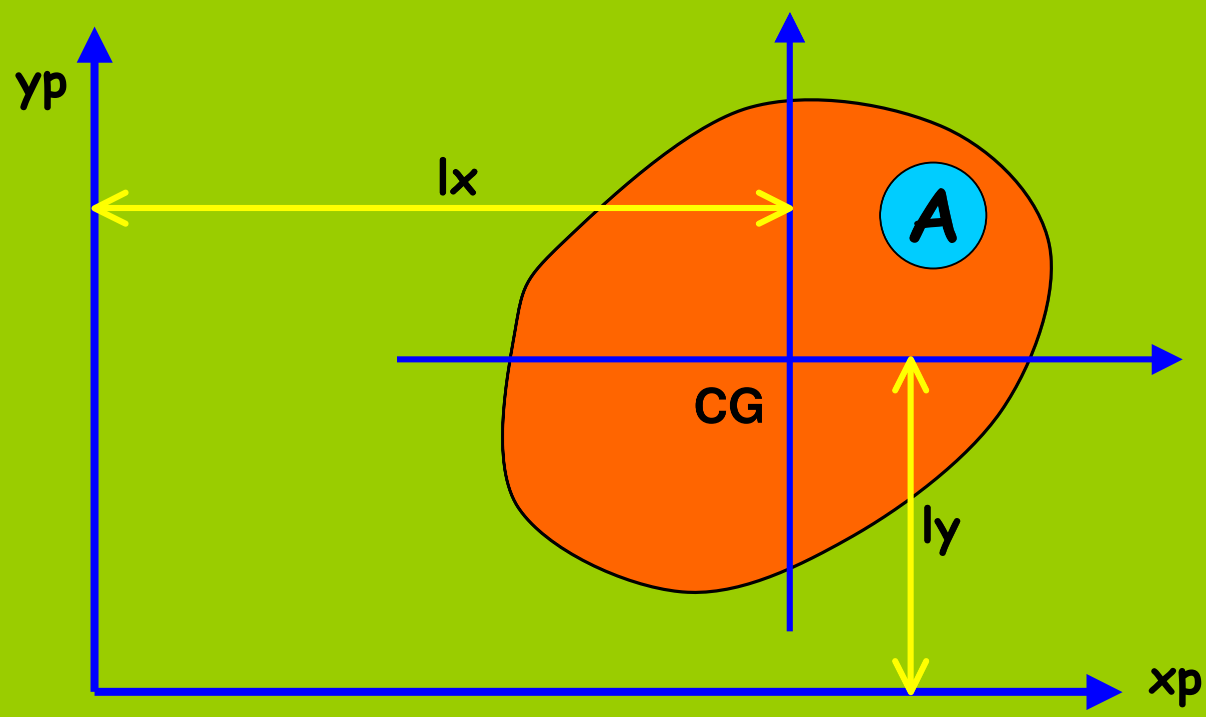


$$Jyp = Jy + lx^2 . A$$

Assim, o momento de inércia de uma superfície plana, em relação à um eixo paralelo ao eixo do centro de gravidade, é obtido pelo produto entre a área da superfície e a distância entre ao eixos paralelos, elevado ao quadrado, isto é:

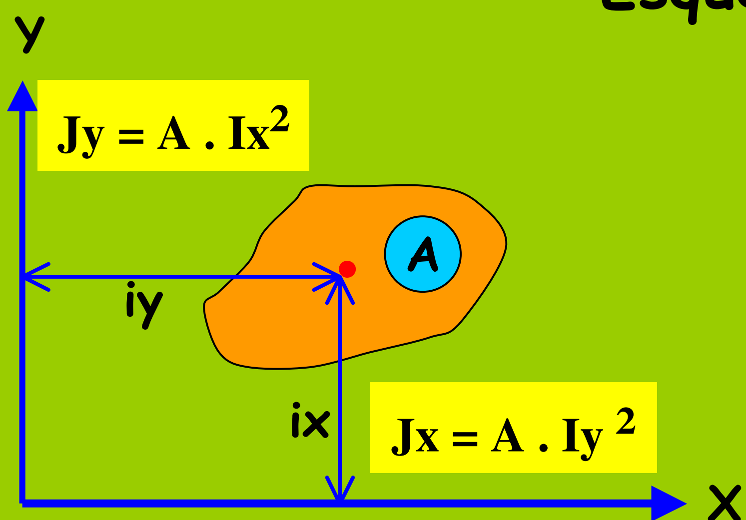
$$Jlx = Jx + A \cdot ly^2$$

$$Jly = Jy + A \cdot lx^2$$



RÁIO DE GIRAÇÃO ¨ i ¨

Esquema representativo :



É o produto da distância do CG ao eixo referencial elevada ao quadrado com a área total da superfície

Determina-se o ráio de giração da superfície,quando determinado for o valor do momento de inércia, e expressa pela raiz quadrada da relação Entre o momento de inércia e a área da superfície.

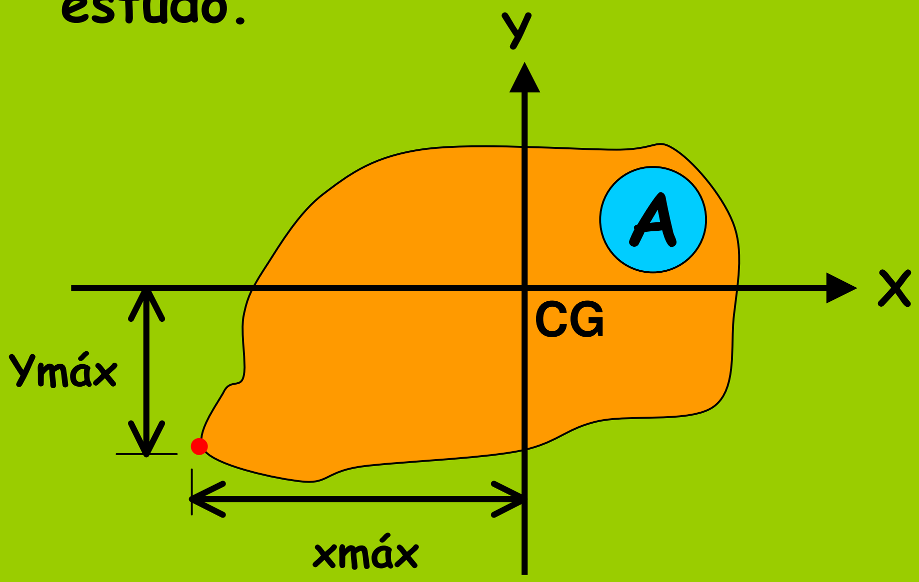
$$i\,x = \sqrt{\frac{Jx}{A}}$$

$$i\,x = \sqrt{\frac{Jx}{A}}$$

$$[\,i\,] = \left\{ [\,L\,]^4 \,/\, [\,L\,]^2 \right\}^{1/2} = [\,L\,]$$

MÓDULO DE RESISTÊNCIA "W"

É a relação entre o momento de inércia do eixo do CG com a distância deste eixo até a borda mais extrema da seção em estudo.



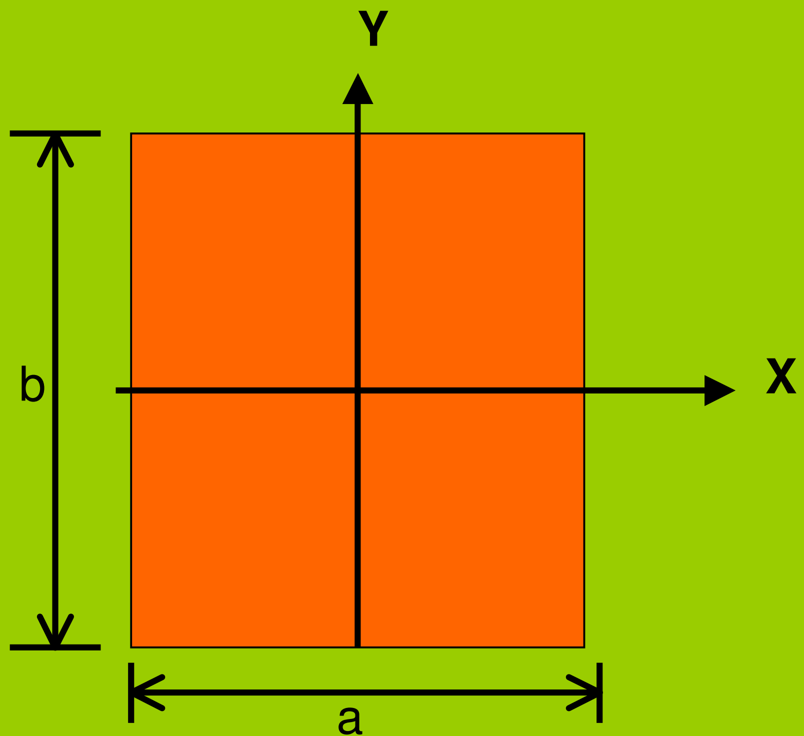
$$W\,x = \frac{Jx}{ymáx.}$$

$$W\,y = \frac{Jx}{xmáx.}$$

$$[\,W\,] = \frac{[\,J\,]}{x \text{ ou } y} = \frac{[\,L\,]^4}{[\,L\,]} = [\,L\,]^3$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÕES: QUADRADA E RETANGULAR



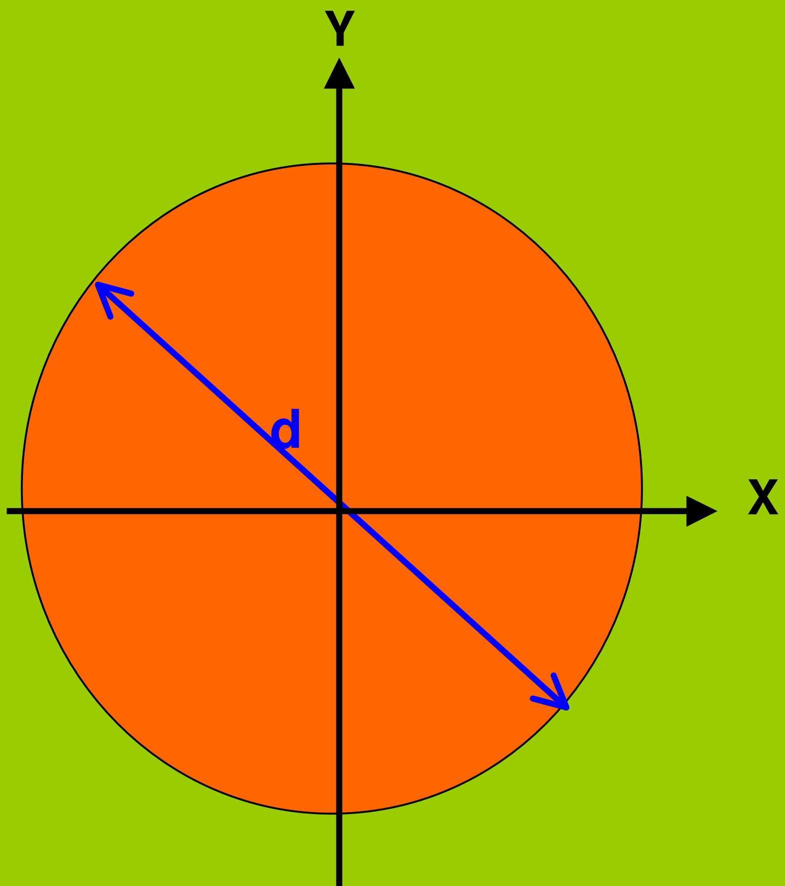
$$J(x,y) = \frac{(a)^4}{12}$$

$$i(x,y) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$W(xy) = \frac{a^3}{6}$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÃO CIRCULAR:



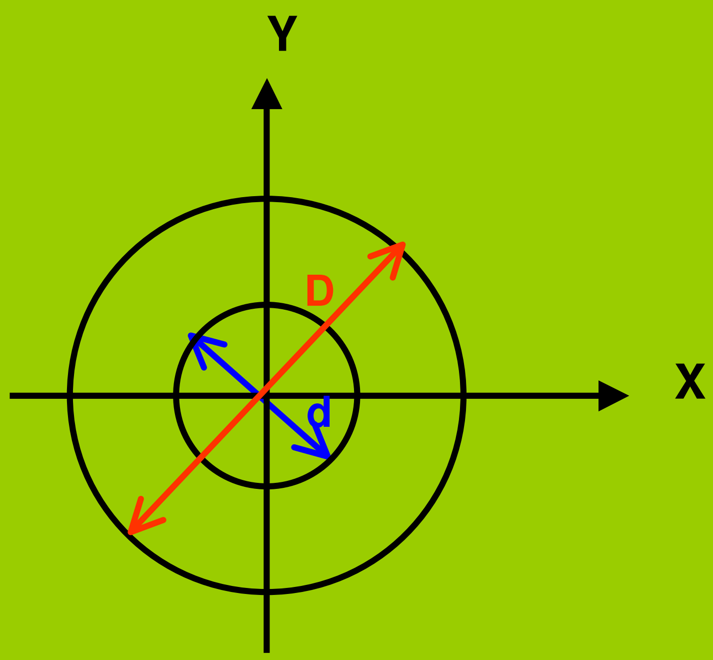
$$J(x,y) = \frac{(\pi.d)^4}{64}$$

$$i(x,y) = \frac{d}{4}$$

$$W(xy) = \frac{\pi.d^3}{32}$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÃO CIRCULAR DUPLA CONCÊNTRICA:



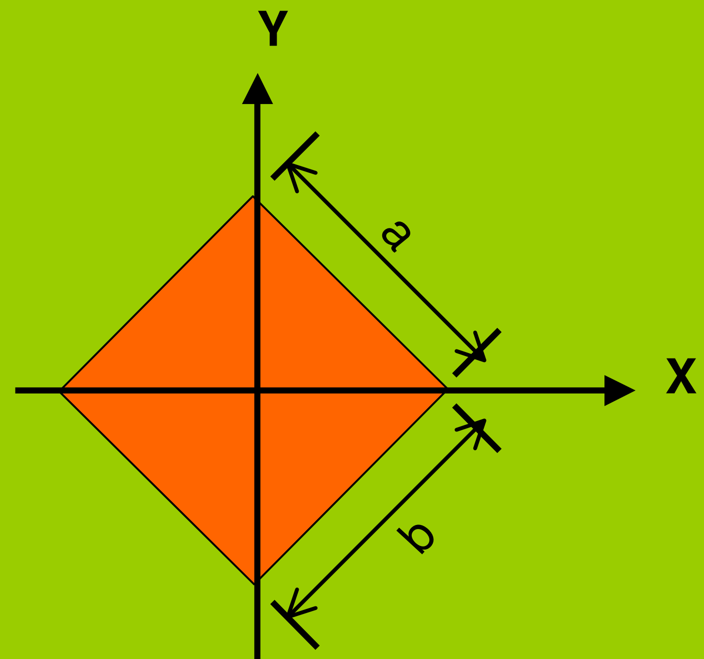
$$J(x,y) = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}$$

$$i(x,y) = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$$

$$W(x,y) = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32D}$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÃO LOSANGO RETO



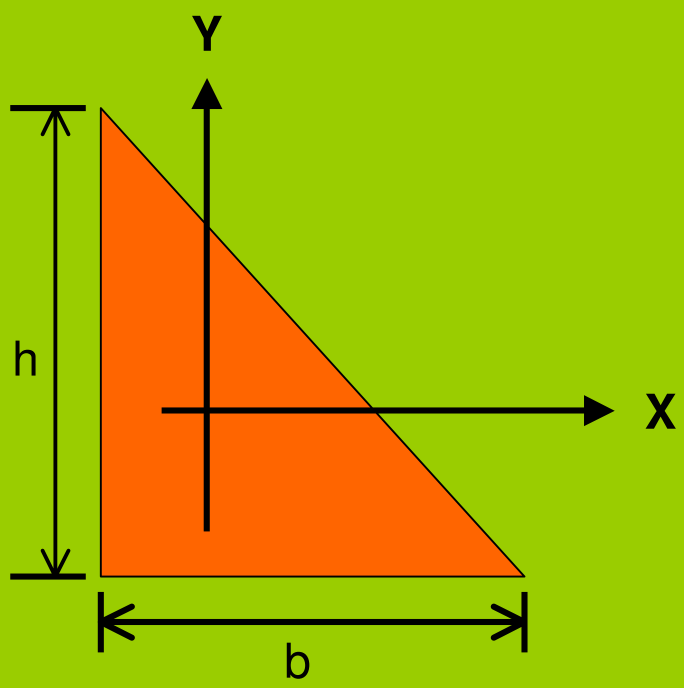
$$J(x,y) = \frac{(a)^4}{12}$$

$$i(x,y) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$W(xy) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÃO TRIÂNGULO RETÂNGULO :



$$J_x = \frac{(b.h)^3}{36}$$

$$J_y = \frac{(h.b)^3}{36}$$

$$i_x = \frac{h\sqrt{2}}{6}$$

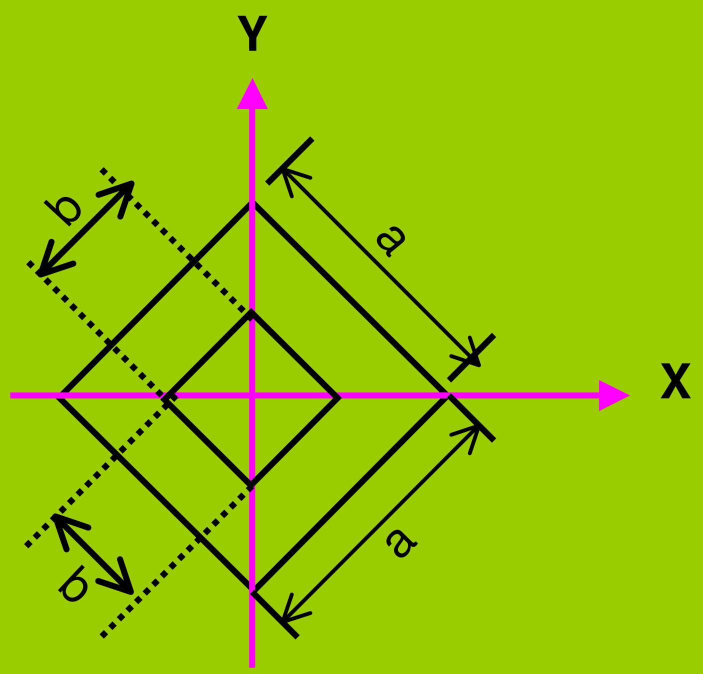
$$i_y = \frac{b\sqrt{2}}{6}$$

$$W_x = \frac{b.h^2}{24}$$

$$W_y = \frac{h.b^2}{24}$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÃO LOSANGO RETO CIRCUNSCRITO :



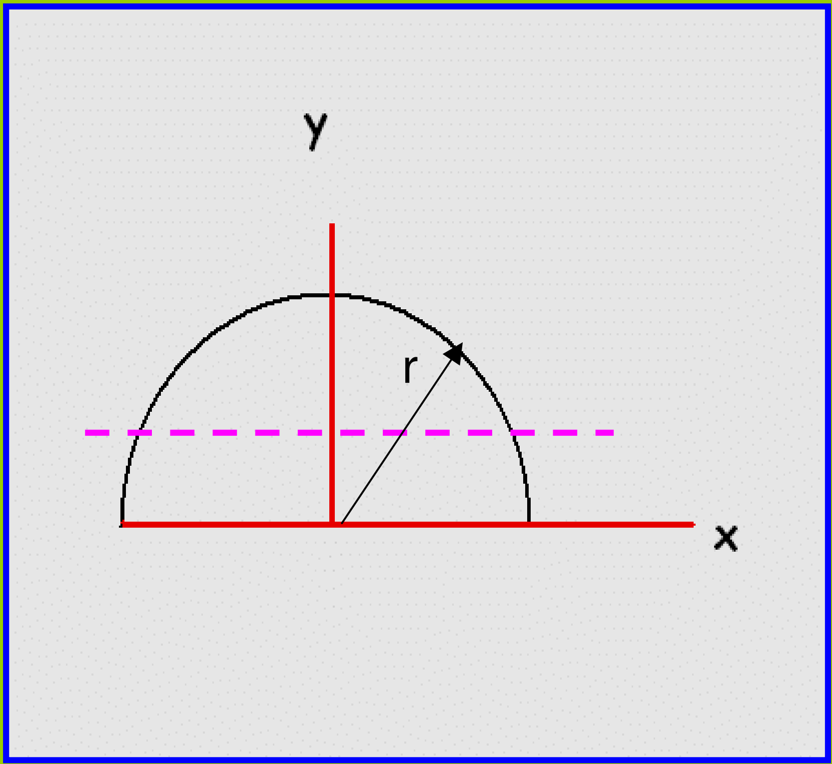
$$J(x,y) = \frac{(a)^4 - (b)^4}{12}$$

$$i(x,y) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{12}$$

$$i(x,y) = \frac{\sqrt{2(a^4 + b^4)}}{12a}$$

PARA CÁLCULO DE ¨J¨, ¨i¨ e ¨W¨

SEÇÃO SEMI-CÍRCULO :



$J_x = 0{,}1098\ r^4$

$J_y = 0{,}3927\ r^4$

$i_x = 0{,}2640\ r$

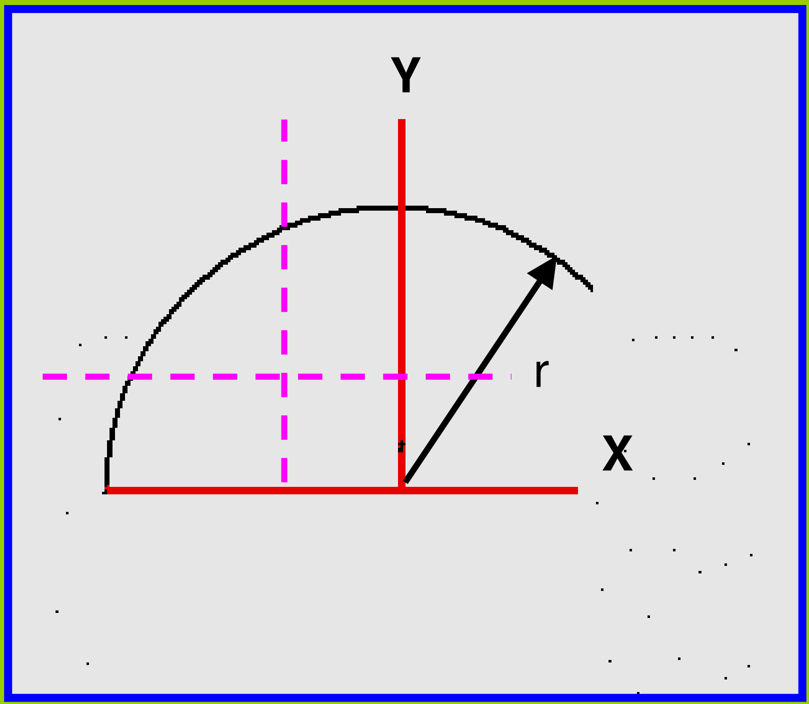
$i_Y = 0{,}5000\ r$

$W_x = 0{,}1900\ r^3$

$W_y = 0{,}3927\ r^3$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÃO $\frac{1}{4}$ DE CÍRCULO :



$$Jx = Jy = 0,0549\ r^4$$

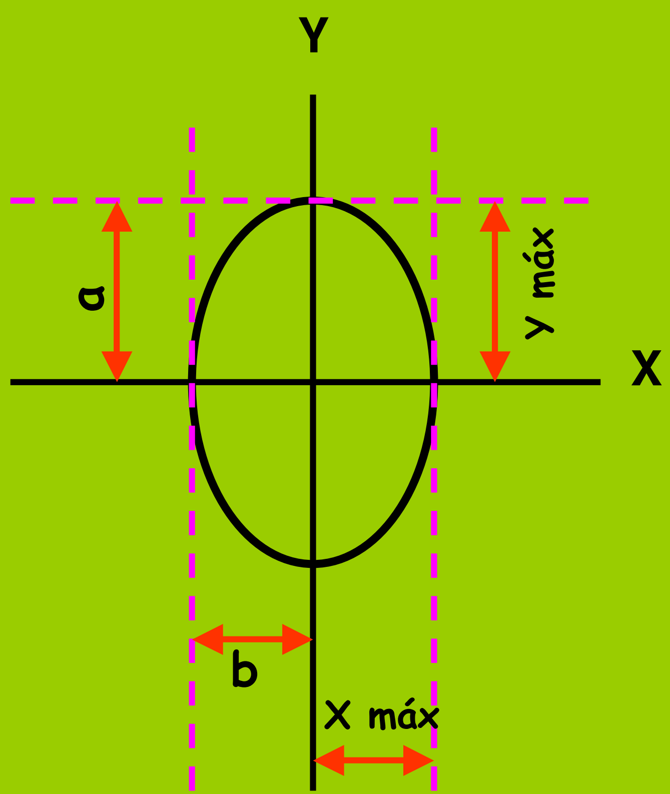
$$ix = iy = 0,2640\ r$$

$$Wx = Wy = 0,0953\ r^3$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

SEÇÃO ELÍPTICA :

Área $= \pi ab$



$$J_x = \frac{\pi b a^3}{4} \quad ; \quad J_y = \frac{\pi a b^3}{4}$$

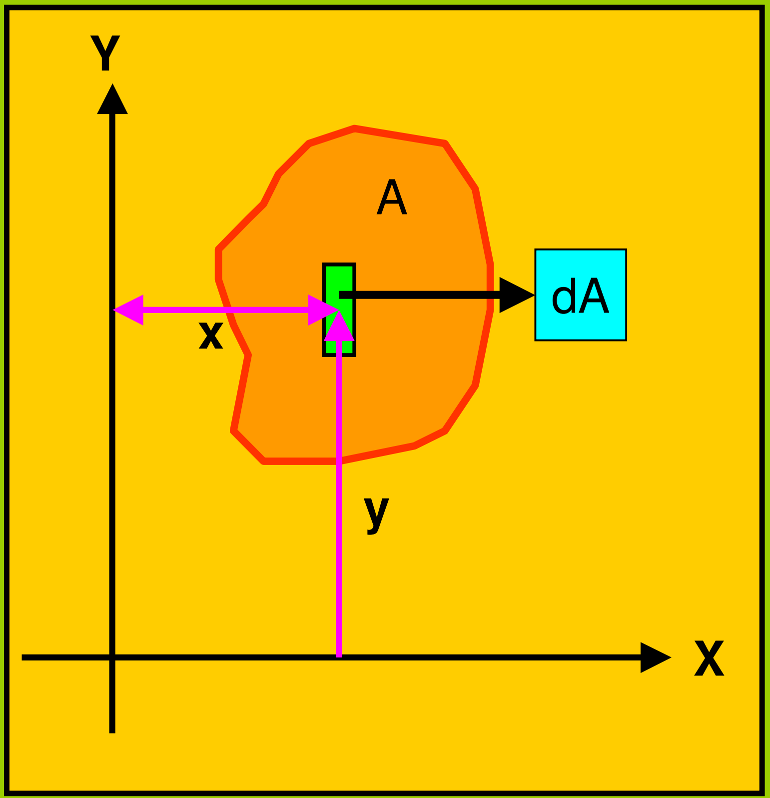
$$i_x = \sqrt{\frac{\pi b a^3}{4\pi ab}} = \frac{a}{2} \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{\pi a b^3}{4\pi ab}} = \frac{b}{2}$$

$$W_x = \frac{\pi b a^3}{4a} \quad ; \quad W_x = \frac{\pi b a^2}{4}$$

$$W_y = \frac{\pi a b^3}{4b} \quad ; \quad W_y = \frac{\pi a b^2}{4}$$

MOMENTO CENTRÍFUGO OU PRODUTO DE INÉRCIA ¨Jxy¨

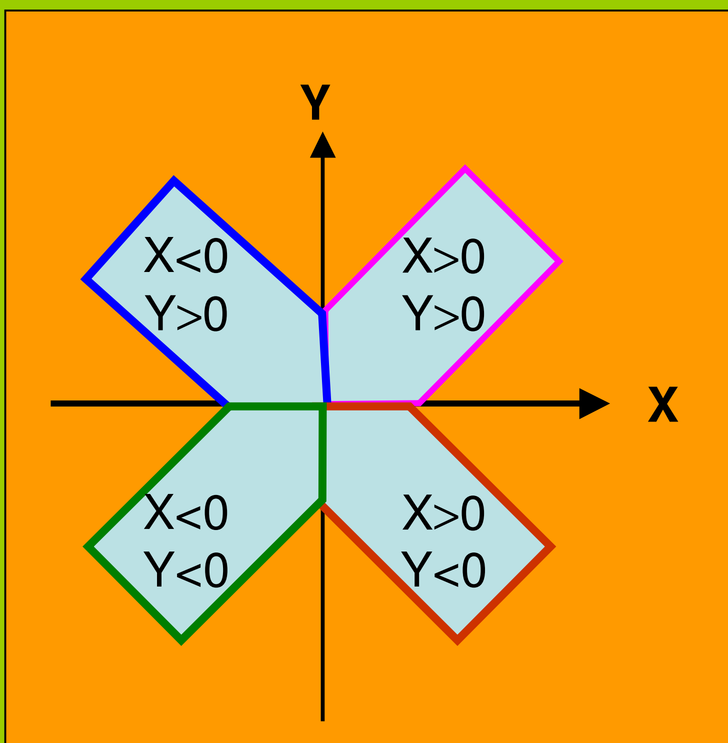
É a integral de área dos produtos entre pequenas frações de área ¨dA¨ de uma superfície em relação às coordenadas referenciadas à um eixo.



$$Jxy = \int_A xy\,dA$$

CONVENÇÃO DE QUADRANTES E SINAIS

Dependendo da posição da superfície em relação ao eixo referencial X e Y, o produto inercial, poderá ser positivo, negativo ou até nulo. Será positivo quando predominar no 1° e 3° quadrante e negativo no 2° e 4° quadrante, e será nulo quando houver eixo de simetria.

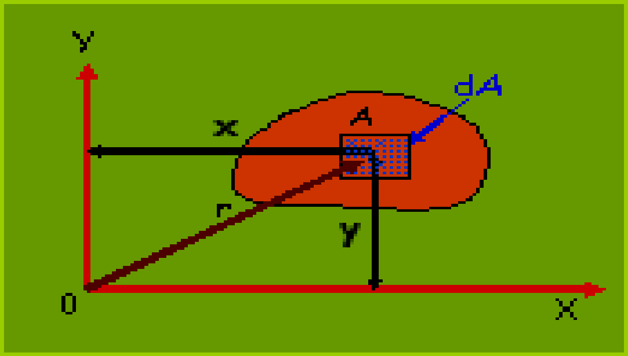


1° e 3° QUADRANTE ¨ $J_{xy} > 0$
2° e 4° QUADRANTE ¨ $J_{xy} < 0$
NULO NA SIMETRIA ¨ $J_{xy} = 0$

MOMENTO POLAR DE INÉRCIA "J_P"

O MOMENTO POLAR DE INÉRCIA É SEMPRE EM RELAÇÃO À ORIGEM " O " :

então: $J_p = \int_a r^2 \, d_a$



Obs:

Há um condicionante, isto é:

desde que: $r^2 = x^2 + y^2$,

$$J_p = \int_a (x^2 + y^2)\, d_a \Rightarrow J_p = [\int_a x^2 d_a + \int_a y^2 d_a] \Rightarrow J_p = J_x + J_y$$

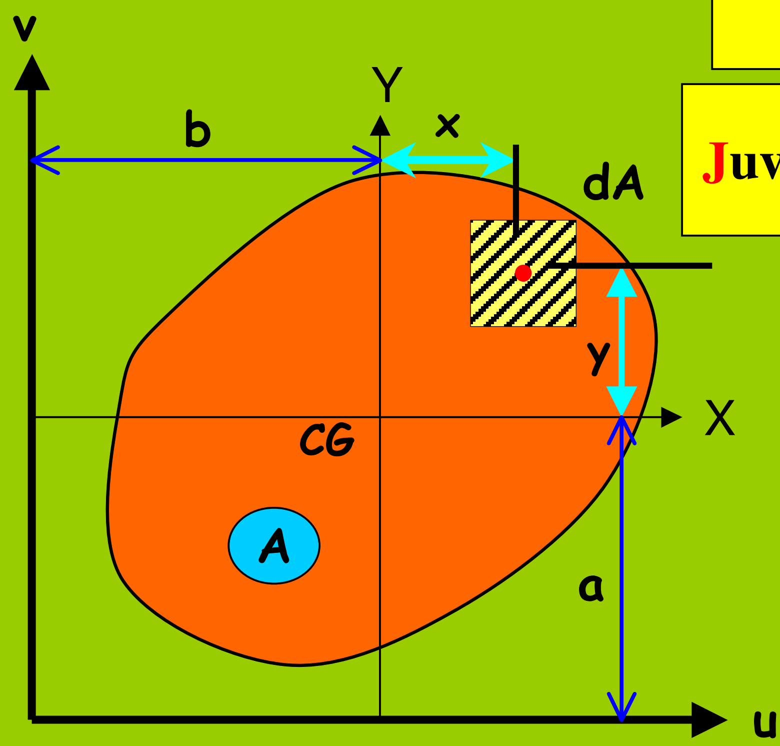
Superfície centrífuga: $C = J_{xy} / S$

Momento centrífugo ou produto de inércia:

$$J_{xy} = \int x\, y\, d\, S$$

TEOREMA DE Steiner – Transporte de eixos

Com X e Y, que são eixos sobre o CG, de uma superfície, determinável se torna o momento de inércia desta superfície em relação a um outro eixo paralelo u em X e v em Y, aplicando-se o teorema de Steiner, assim:



$$J_{uv} = \int_A (y + a)(x + b)\, dA$$

$$J_{uv} = \int_A xy\,dA + a\int_A x\,dA + b\int_A y\,dA + ab\int_A dA$$

Como os eixos x e y passam pelo CG, tem-se:

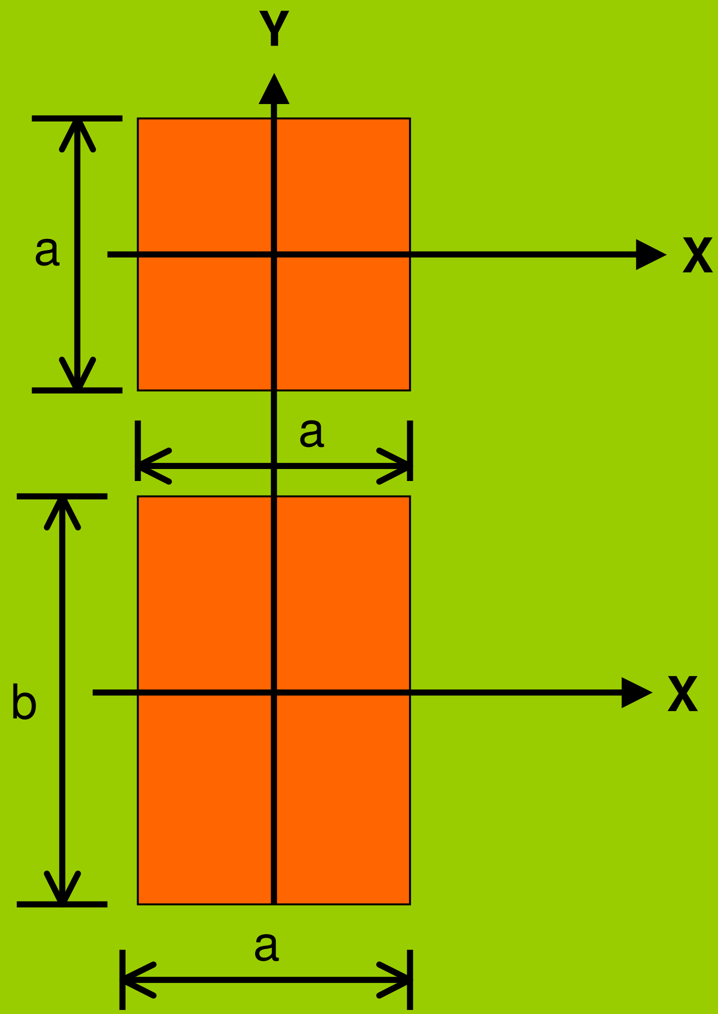
a $\int_A x\,dA = 0$ e $\int_A y\,dA = 0$

A e b =0 por serem em função do eixo x e y que passam pelo CG

Então: $J_{uv} = J_{xy} + A.a.b$

PRODUTOS DE INÉRCIA DAS SUPERFÍCIES PLANAS

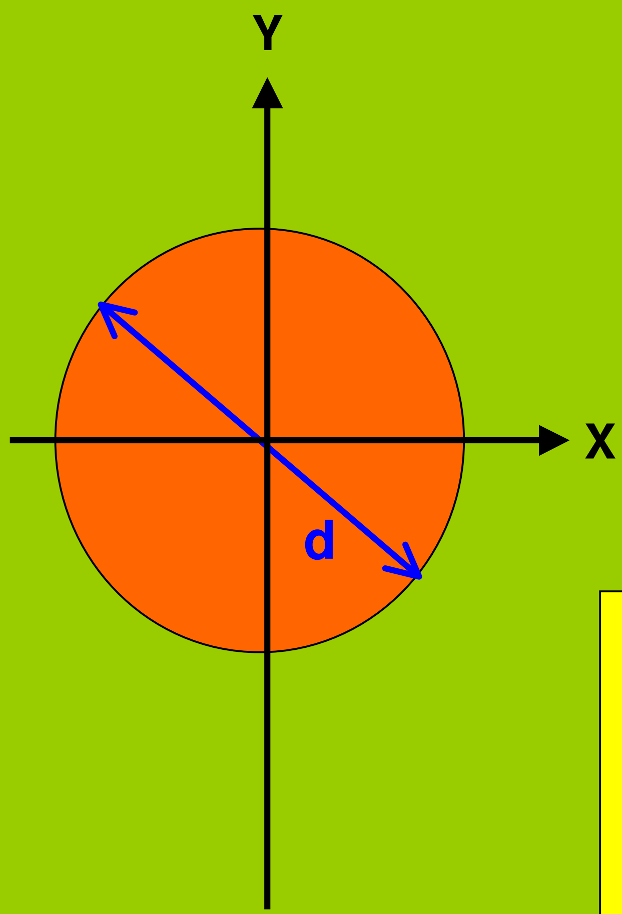
SEÇÕES: QUADRADA E RETANGULAR

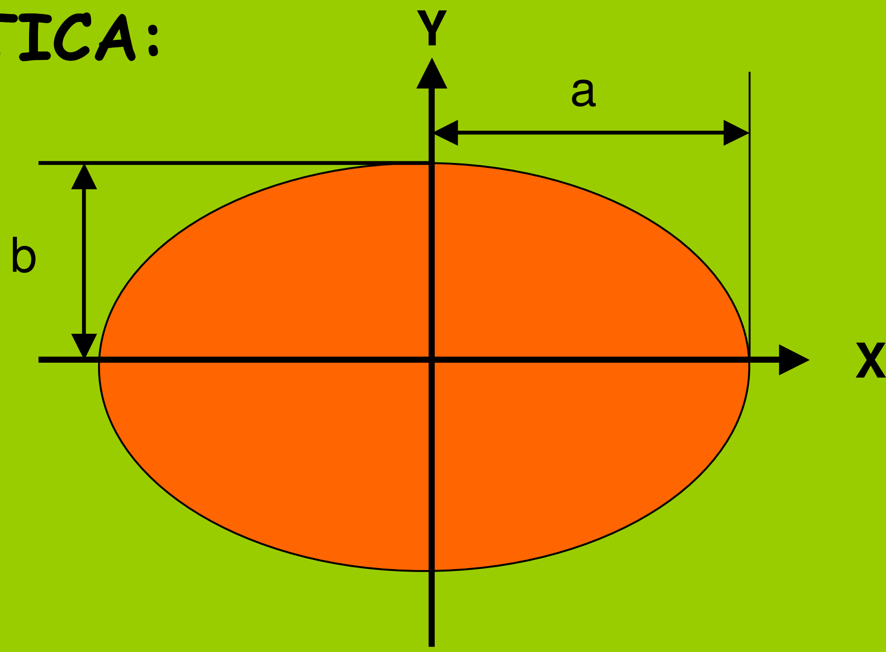


Jxy = 0

PRODUTOS DE INÉRCIA DAS SUPERFÍCIES PLANAS

SEÇÃO CIRCULAR E ELÍPTICA:

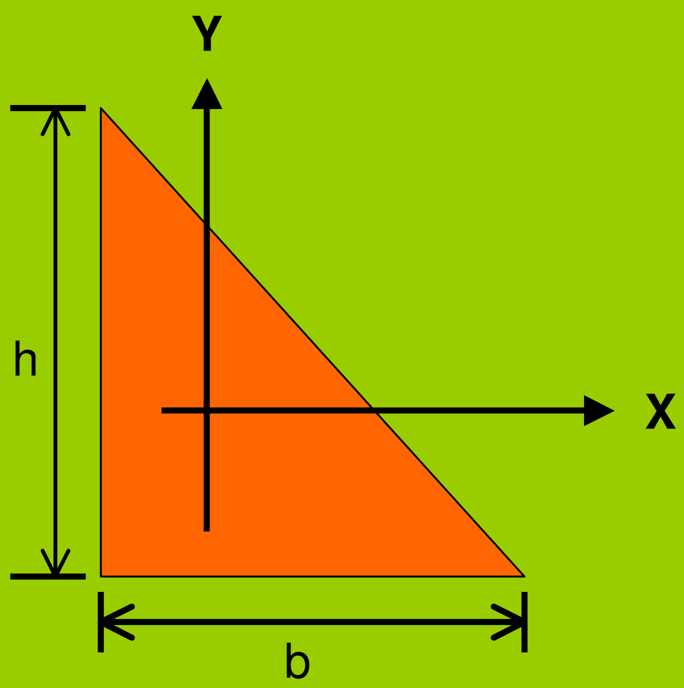




Jxy = 0

PRODUTOS DE INÉRCIA DAS SUPERFÍCIES PLANAS

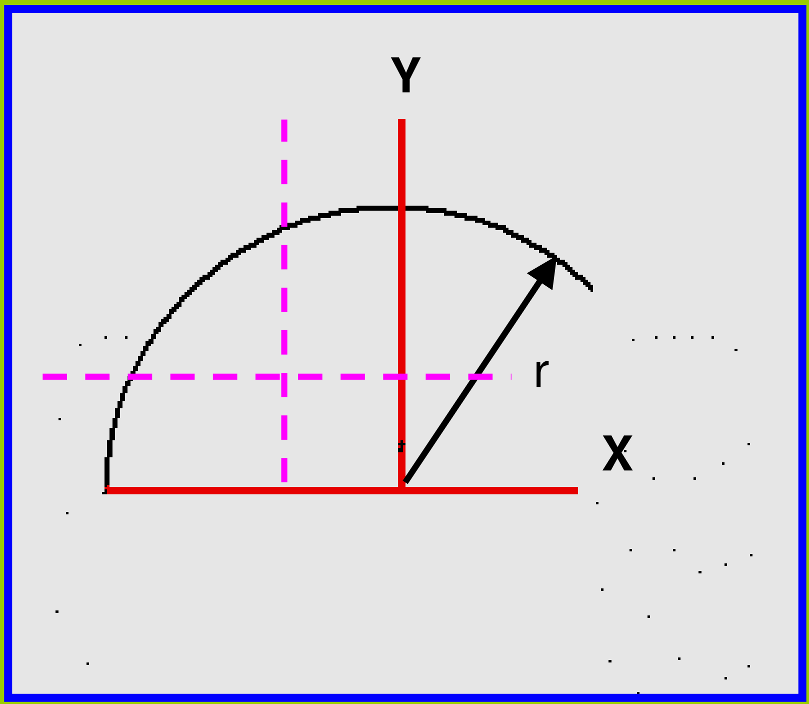
SEÇÃO TRIÂNGULO RETÂNGULO :



$$J_{xy} = \frac{(b^2\ h^2)}{72}$$

PRODUTO DE INÉRCIA DE SUPERFÍCIES PLANAS

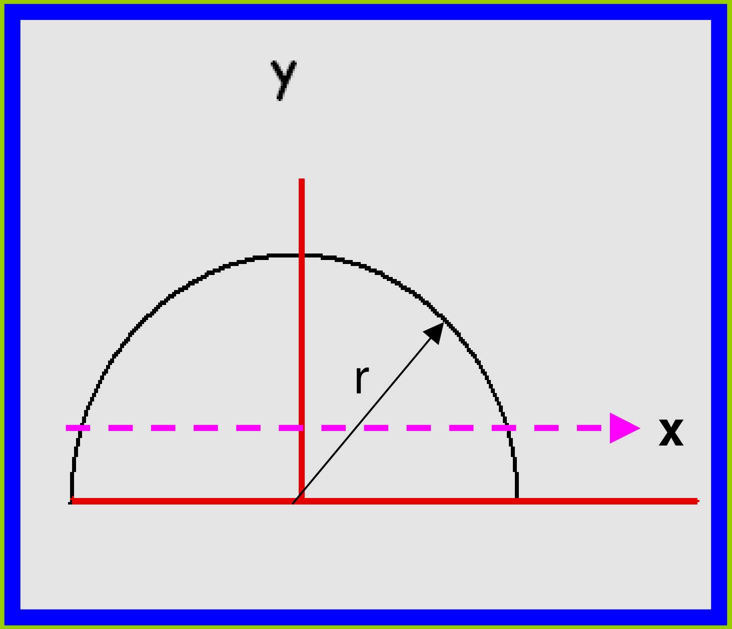
SEÇÃO ¼ DE CÍRCULO :



$$J_{xy} = -0{,}0163\ r^4$$

PRODUTOS DE INÉRCIA DAS SUPERFÍCIES PLANAS

SEÇÃO SEMI-CÍRCULO :



$$J_x = -\,0{,}0163\ r^4$$

EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

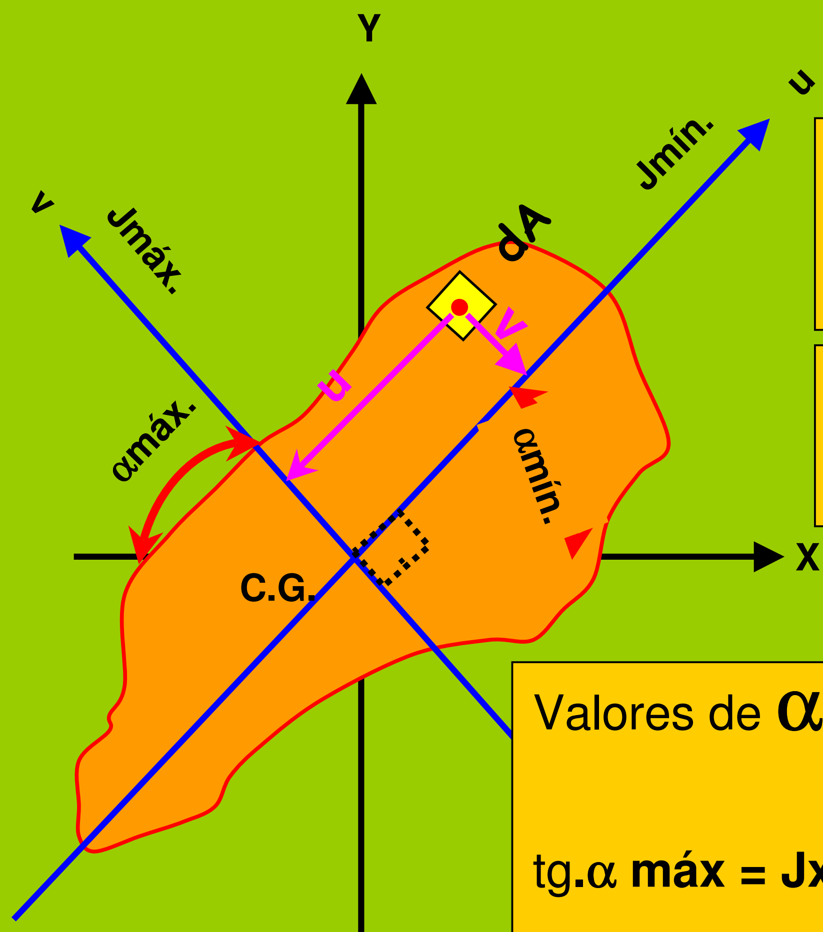
Base teórica:

1-Pelo CG de uma superfície, passam infinitos eixos, e num desses eixos, passam os pares de menor e maior momento de inércia.

2-O de maior momento estará mais afastado ou distante dos elementos de superfície, que formam a superfície total.

3-O de menor momento estará mais perto ou próximo dos elementos de superfície, que formam a superfície total.

EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA



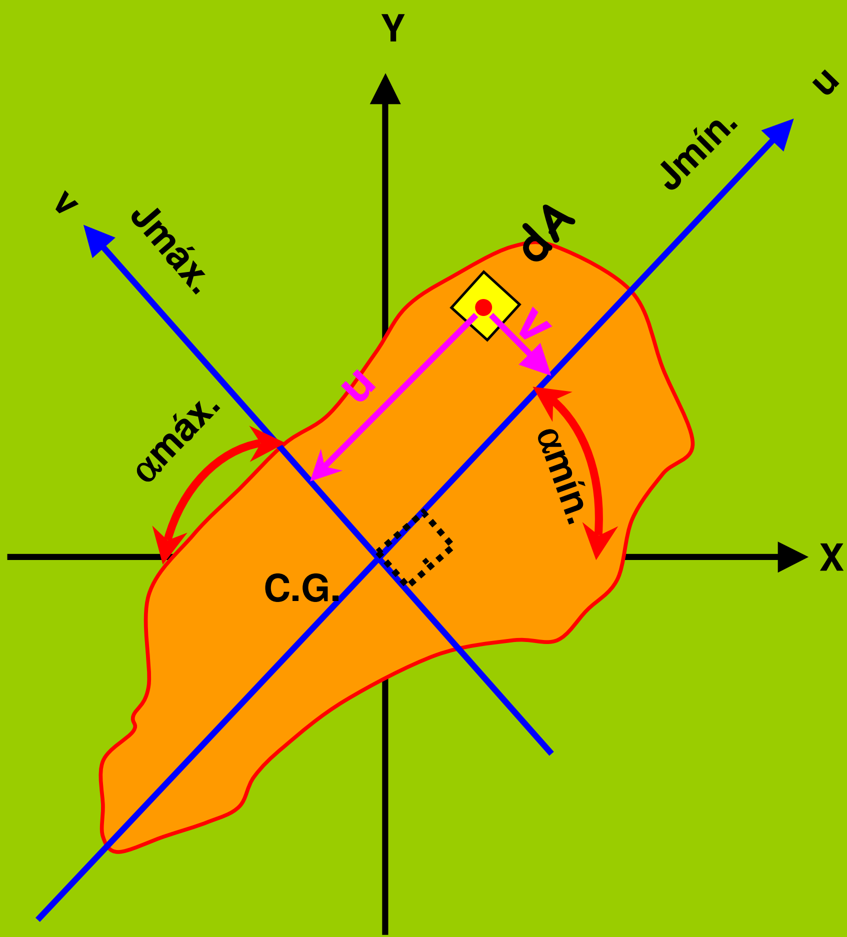
$$J_{máx.} = 0{,}5(J_x+J_y) + \sqrt{(J_x-J_y)^2 + 4J^2_{xy}}$$

$$J_{mín.} = 0{,}5(J_x+J_y) - \sqrt{(J_x-J_y)^2 + 4J^2_{xy}}$$

Valores de α

$tg.\alpha$ **máx = $(J_x - J_y) / J_{xy}$** e $tg.\alpha$ **míx = $(J_x - J_y) / J_{xy}$**

EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA



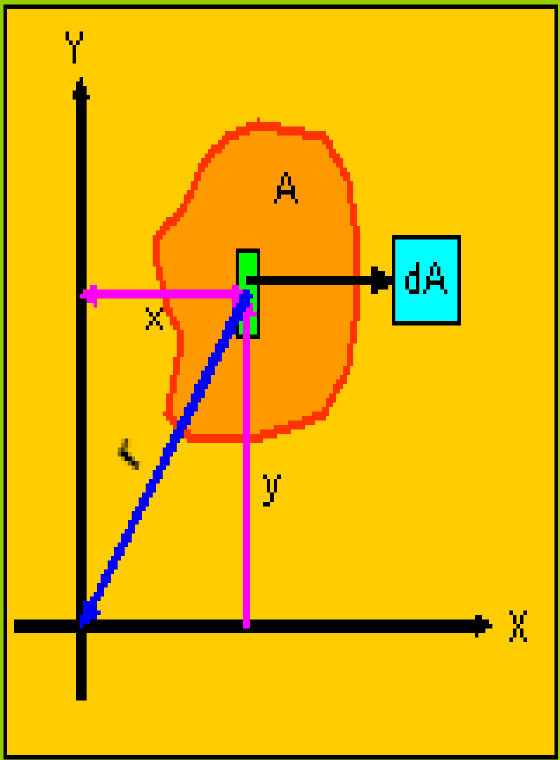
Então: α **máx = α mín + 90°**

Assim sendo:

Qualquer par de eixos defasados de 90° entre si, e que passam pelo CG da superfície, terá a soma de seus momentos de inércia constante.

$$J_{máx.} + J_{mín.} = J_x + J_y$$

MOMENTO POLAR DE INÉRCIA



É definido pela integração de área dos produtos entre os infinitésimos de área dA e as suas respectivas distâncias ao quadrado

Assim sendo:

$$Jp = \int A \ r^2 \ d A$$

Pitágoras:

$$Jp = \int A \ (x^2 + y^2) \ d A$$

$$Jp = \int A \ x^2 \ d A + \int A \ y^2 \ d A$$

Portanto:

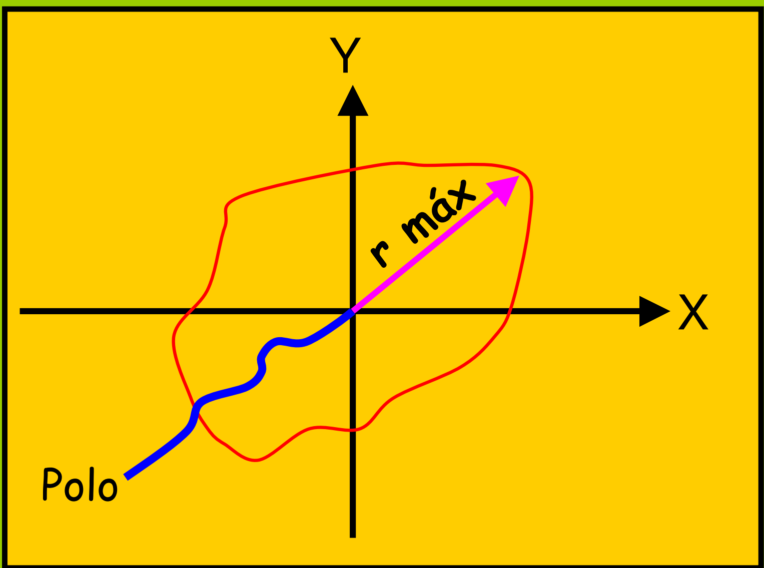
$$Jp = Jx + Jx$$

MÓDULO DE RESISTÊNCIA POLAR "W_P"

É a relação entre o momento de inércia polar da seção em estudo com o comprimento do polo mais distante da face da seção em estudo.

$$W_P = \frac{J_p}{r\ Máx}$$

Análise dimensional $[\ W_p\ ] = \dfrac{[\ L\ ]^4}{[\ L\ ]} = [\ L\ ]^3$

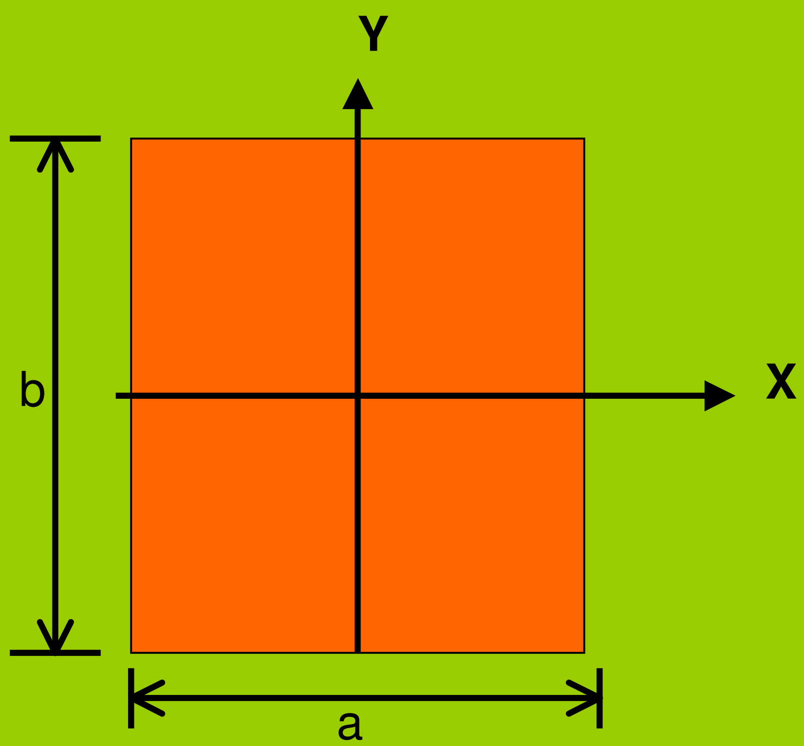


Importante observação:

O módulo de resistência polar, é muito importante nos projetos em que há esforços de torção no elemento, e quanto maior for o módulo, mais resistente à torção se torna a peça.

PARA CÁLCULO DE ¨Jp¨e ¨Wp¨

SEÇÕES: QUADRADA

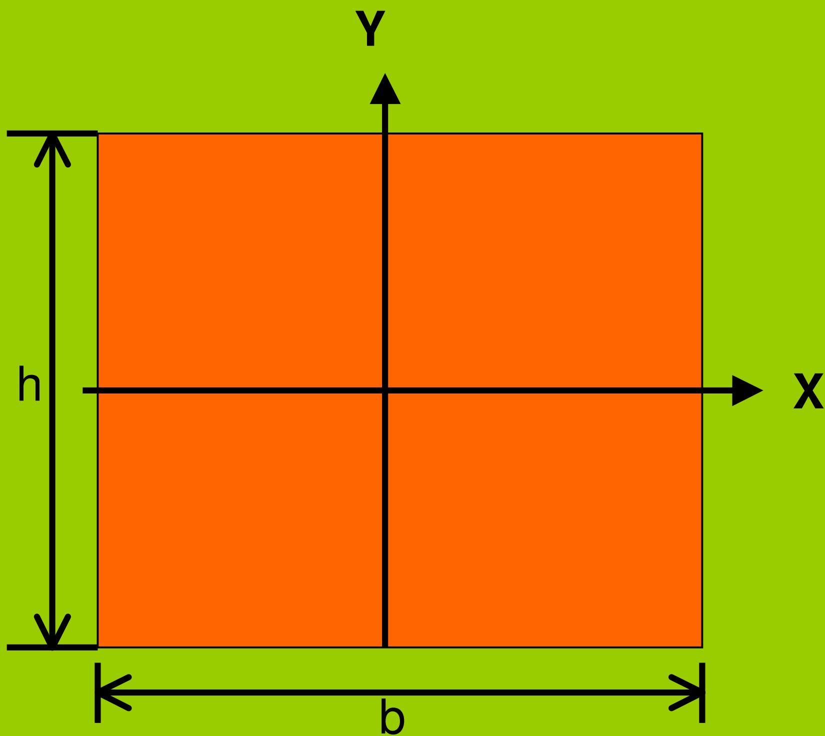


$$Jp = \frac{(a)^4}{6}$$

$$Wp = 0{,}23\ a^3$$

PARA CÁLCULO DE ¨Jp¨e ¨Wp¨

SEÇÕES: RETANGULAR

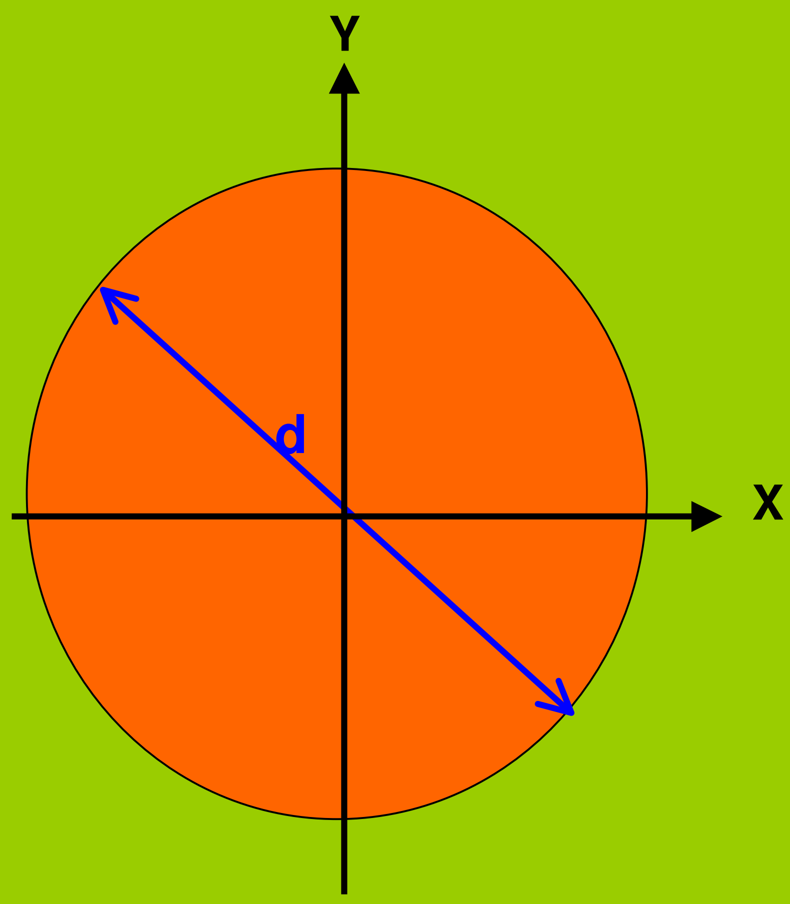


$$Jp = \frac{b \cdot h\,(b^2 + h^2)}{12}$$

$$Wp = \frac{b \cdot h^2}{3 + (1{,}8 \cdot h/b)}$$

PARA CÁLCULO DE ¨Jp¨ e ¨Wp¨

SEÇÃO CIRCULAR:

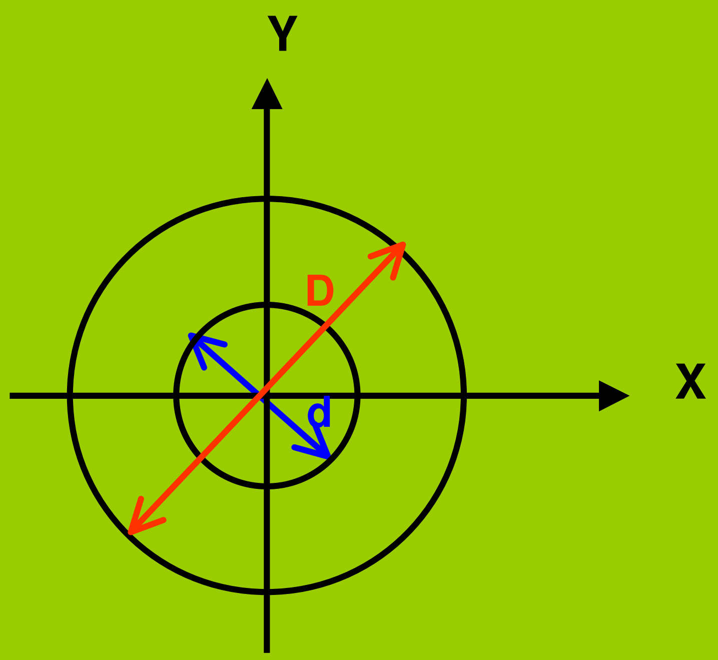


$$Jp = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$Wp = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

PARA CÁLCULO DE ¨Jp¨ e ¨Wp¨

SEÇÃO CIRCULAR DUPLA CONCÊNTRICA:

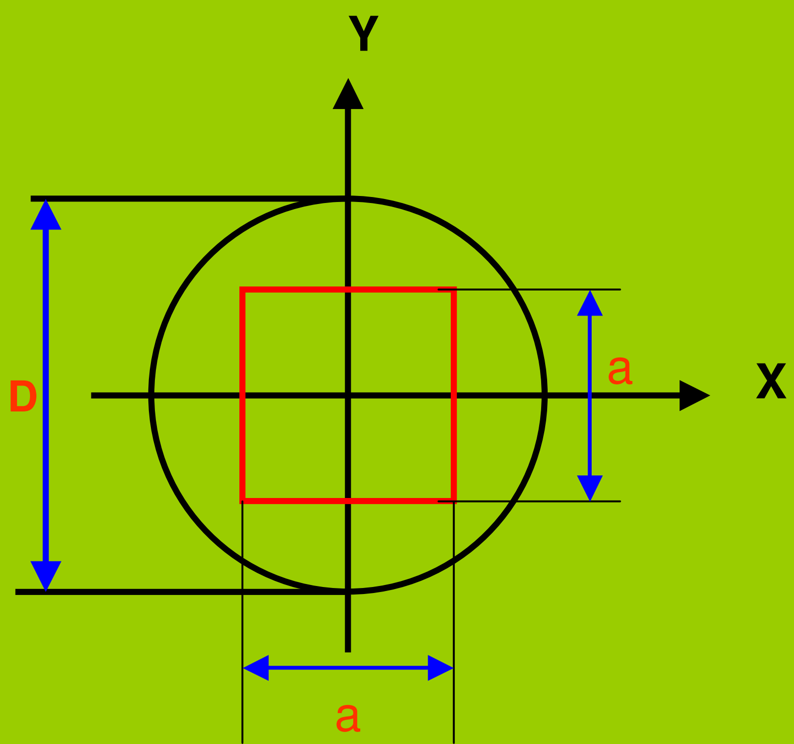


$$Jp = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

$$Wp = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}$$

PARA CÁLCULO DE ¨Jp¨e ¨Wp¨

SEÇÃO CIRCULAR COM QUADRADO CONCÊNTRICO:

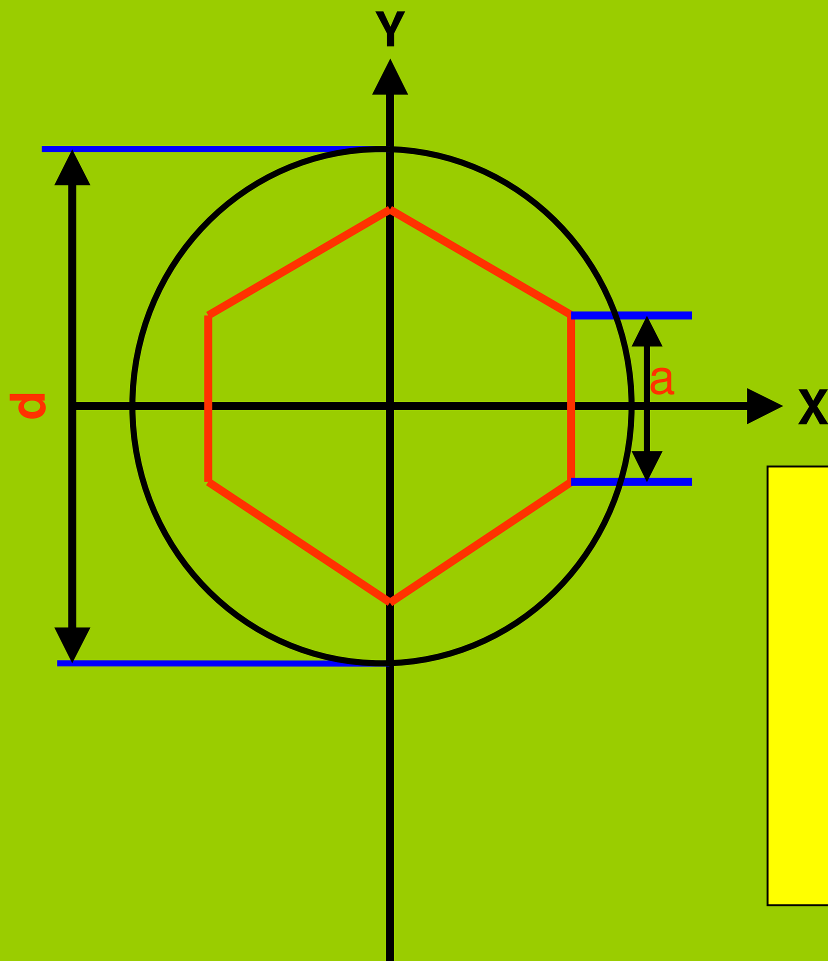


$$Jp = \frac{\pi\,(D^4) - a^4)}{32}$$

$$Wp = \frac{\pi d^3}{16D} - \frac{a^4}{3d}$$

PARA CÁLCULO DE ¨Jp¨e ¨Wp¨

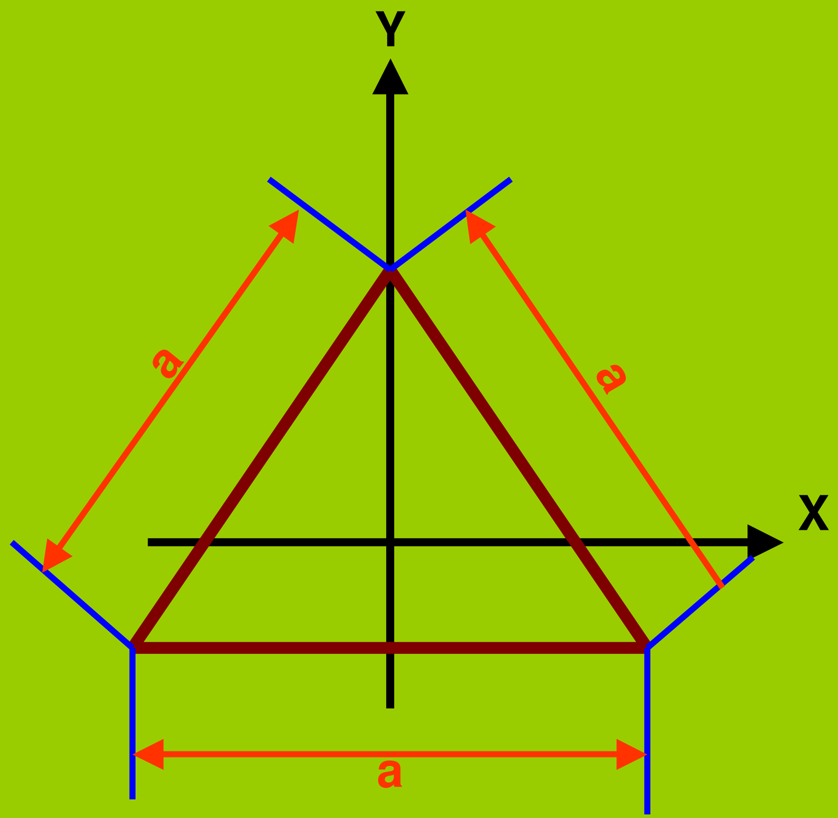
SEÇÃO CIRCULAR COM SEXTAVADO CONCÊNTRICO:



$$Jp = \frac{5\sqrt{3}\ .\ a^4}{8}$$

$$Wp = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{5\sqrt{3a^4}}{4d}$$

PARA CÁLCULO DE ¨Jp¨e ¨Wp¨



$$Jp = \frac{\sqrt{3} \cdot a^4}{48}$$

$$Wp = \frac{a^3}{20}$$

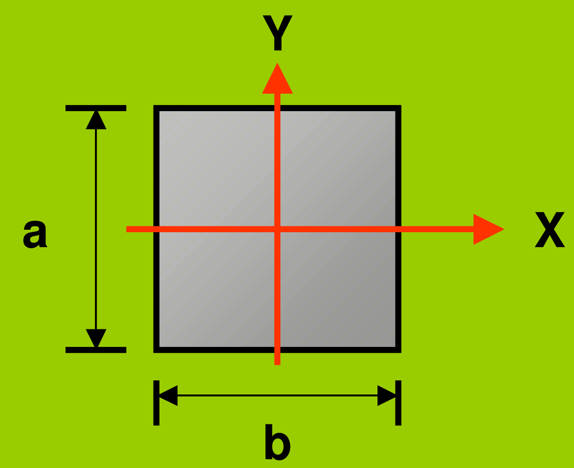
EXERCÍCIOS

1-Determinar:

-Momentos de inércia:

-Ráio de giração:

-Módulo de resistência



dados:

a=127mm. ↔ (12,7cm)

b=127mm. ↔ (12,7cm)

Resolvendo:

1.1-Determinando os momentos de inércia ¨J¨:

seção quadrada: $Jx=Jy=\dfrac{a^4}{12} \Rightarrow Jx=Jy=\dfrac{12,7^4}{12}$

$\Rightarrow Jx=Jy= 2167,87cm^4 \cong 2168cm^4$

1.2-Determinando os ráios de giração ¨ i ¨:

$$i(x,y) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$ix = iy = \frac{12{,}7\sqrt{3}}{6} = 3{,}67\ cm^4$$

1.3-Determinando os módulos de resistência ¨ W ¨:

$$W(xy) = \frac{a^3}{6}$$

$$W(xy) = \frac{12{,}7^3}{6}$$

$$W(xy) = 341{,}4\ cm^3$$

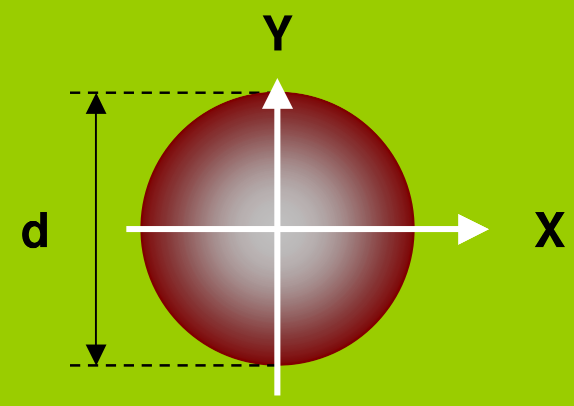
EXERCÍCIOS

2-Determinar:

-Momentos de inércia:

-Ráio de giração:

-Módulo de resistência



dados:

d=254mm. ↔ (25,4cm)

Resolvendo:

2.1-Determinando os momentos de inércia ¨J¨:

$$J(x,y) = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$J(x,y) = \frac{\pi.(25,4)^4}{64}$$

$$J(x,y) = 20.431,7 \text{ cm}^4$$

2.2-Determinando os ráios de giração ¨ i ¨:

$$i(x,y) = \frac{d}{4}$$

$$i(x,y) = \frac{25,4}{4}$$

$$i(x,y) = 6,35\ cm$$

2.3-Determinando os módulos de resistência ¨ W ¨:

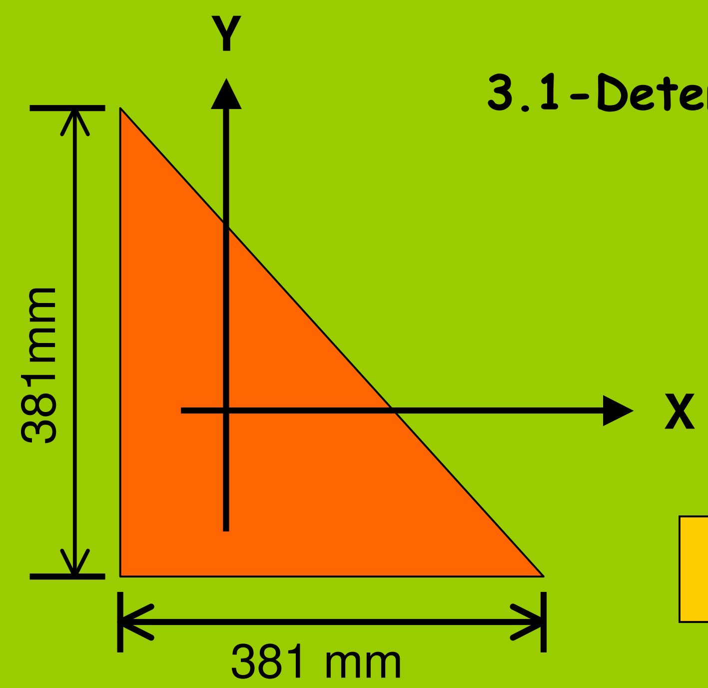
$$W(xy) = \frac{\pi.d^3}{32}$$

$$W(xy) = \frac{\pi.25,4^3}{32}$$

$$W(xy) = 1.608,80\ cm^3$$

PARA CÁLCULO DE ¨J¨, ¨i¨ e ¨W¨

3-SEÇÃO TRIÂNGULO RETÂNGULO :



3.1-Determinando os momentos de inércia ¨J¨:

$$Jx = jy = \frac{b. \, (h^3)}{36}$$

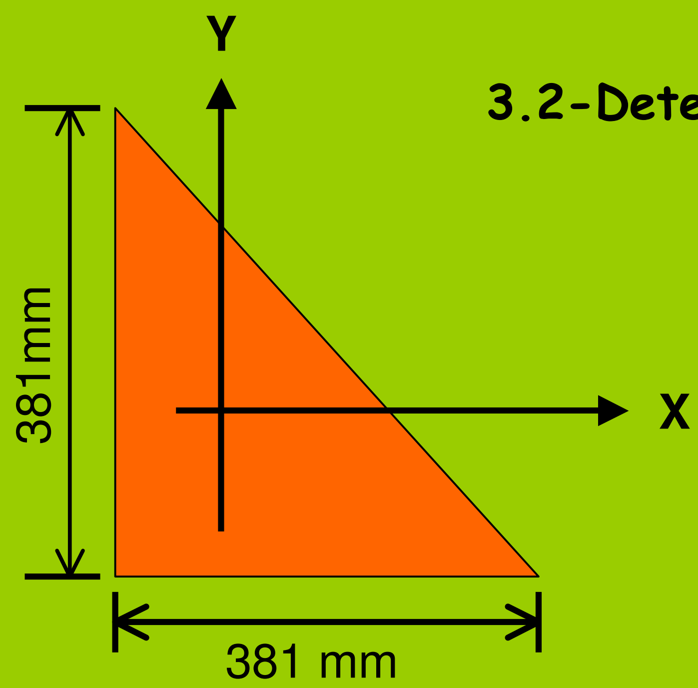
381 mm = 38,1 cm

$$Jx = jy = \frac{38,1 \;\; x \;\; (38,1h)^3}{36}$$

$$Jx = jy = 58.532,54 \; cm^4$$

PARA CÁLCULO DE "J", "i" e "W"

3-SEÇÃO TRIÂNGULO RETÂNGULO :



3.2-Determinando os momentos de inércia "i":

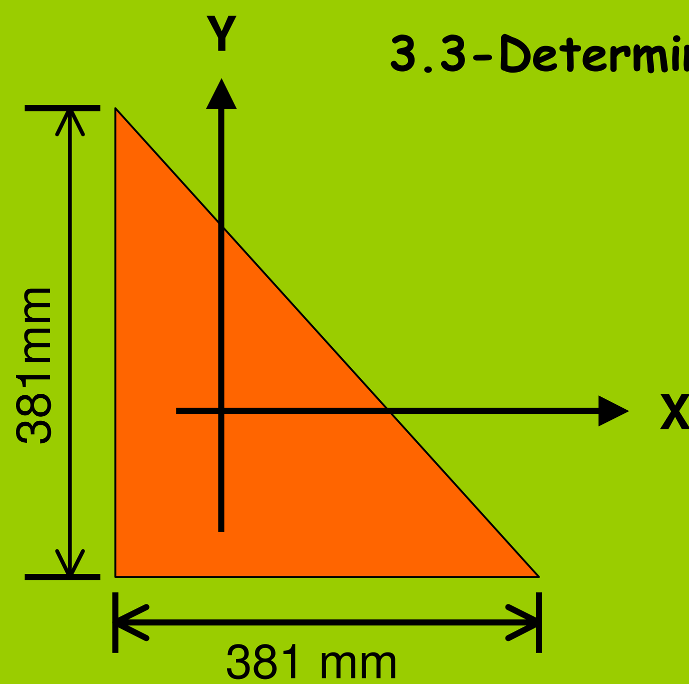
$$ix = iy = \frac{h\sqrt{2}}{6}$$

$$ix = iy = \frac{38{,}1\sqrt{2}}{6}$$

$$Jx = jy = 8{,}98 \text{ cm}$$

PARA CÁLCULO DE ¨J¨, ¨i¨ e ¨W¨

3-SEÇÃO TRIÂNGULO RETÂNGULO :



3.3-Determinando os módulos de resistência ¨ W ¨:

$$Wx = Wy = \frac{h^3}{24}$$

$$Wx = Wy = \frac{38{,}1^3}{24}$$

$$\mathbf{Wx = Wy = 2304{,}43cm^3}$$

EXERCÍCIOS

4-Determinar:

-Momentos de inércia:

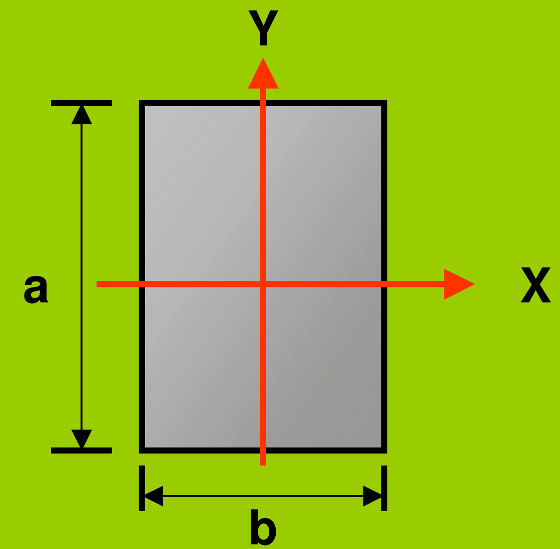
-Ráio de giração:

-Módulo de resistência

dados:

a=135mm. ↔ (25,0cm)

b=250mm. ↔ (13,5cm)



Resolvendo:

4.1a-Determinando os momentos de inércia ¨Jx¨:

seção quadrada: $Jx = \dfrac{a.b^3}{12} \Rightarrow Jx = \dfrac{25\ .\ 13{,}5^3}{12}$

$\Rightarrow Jx =$ $5125{,}78cm^4 \cong$ **$5126cm^4$**

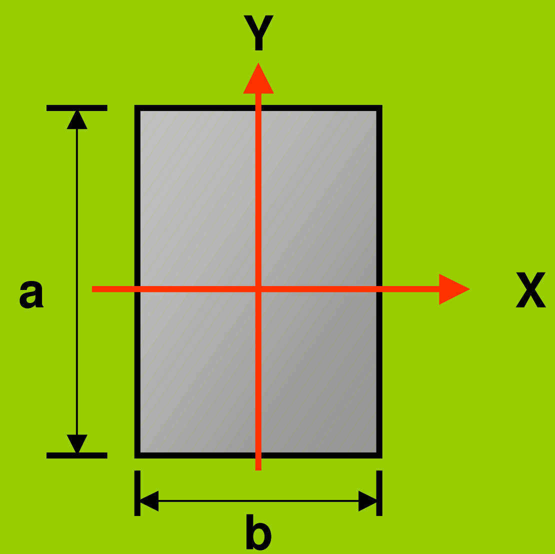
EXERCÍCIOS

4-Determinar:

-Momentos de inércia:

-Ráio de giração:

-Módulo de resistência



dados:

a=135mm. ↔ (13,5cm)

b=250mm. ↔ (25,0cm)

Resolvendo:

4.1b-Determinando os momentos de inércia ¨Jy¨:

$$\text{seção quadrada: } Jy = \frac{b.a^3}{12} \Rightarrow Jy = \frac{13{,}5 \ . \ 25{,}0^3}{12}$$

$$\Rightarrow Jy = 17578{,}13 \text{ cm}^4 \cong 17579\text{cm}^4$$

4.2-Determinando os ráios de giração ¨ i ¨:

4.2a-Determinando os ráios de giração ¨ ix ¨:

$$i(x) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$ix = \frac{25{,}0\sqrt{3}}{6} = 7{,}22\ \text{cm}$$

4.2b-Determinando os ráios de giração ¨ iy ¨:

$$i(y) = \frac{b\sqrt{3}}{6}$$

$$iy = \frac{13{,}5\sqrt{3}}{6} = 3{,}90\ \text{cm}$$

4.3-Determinando os módulos de resistência ¨ W ¨:

4.3a-Determinando os módulos de resistência ¨ Wx ¨:

$$W(x) = \frac{b \cdot (a^3)}{6}$$

$$W(x) = \frac{13{,}5 \cdot (25{,}0^3)}{6}$$

$$W(x) = 35.156{,}25 \text{ cm}^3$$

4.3b-Determinando os módulos de resistência ¨ Wy ¨:

$$W(y) = \frac{a \cdot (b^3)}{6}$$

$$W(y) = \frac{25{,}0 \cdot (13{,}5^3)}{6}$$

$$W(y) = 10.251{,}56 \text{cm}^3$$

POR ENQUANTO É SO !!!!!

TEM MAIS NA PRÓXIMA AULA !!!!!

PROF. HIROSHI PAULO YOSHIZANE
14 – 05 - 2007